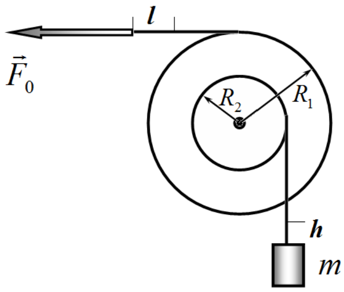
Решения задач.

Задача 9.1. Простая задача про простые механизмы.

1.1 Ворот.



Если конец веревки, к которой приложена сила, сместить на расстояние l, то груз поднимется на высоту h, которую можно найти из условия равенства углов поворота:

$$\frac{l}{R_1} = \frac{h}{R_2}. \qquad (1)$$

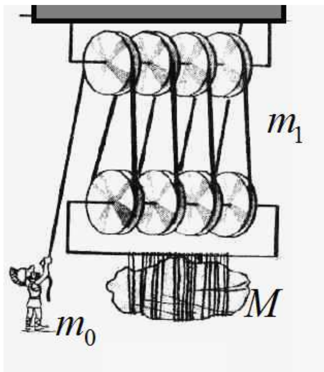
В соответствии с «золотым правилом» выполняется условие

$$F_0 l = mgh. \qquad (2)$$

Из этих выражений, следует, что масса поднимаемого груза равна

$$m = \frac{F_0}{g}\frac{R_1}{R_2}. \qquad (3)$$

1.2 Полиспаст.



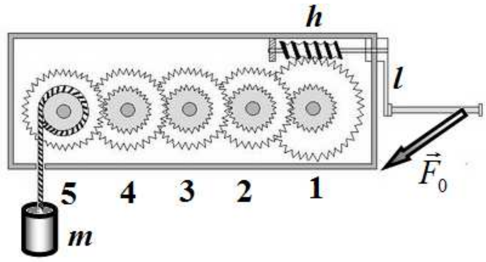
Из условия постоянства длины веревки следует, что если человек опустит конец веревки на величину l, то груз поднимется на высоту $h = \frac{l}{8}$. Так как максимальная сила, которую может приложить человек равна $m_0 g$, то максимальный груз, который можно поднять, находится из «золотого правила механики»:

$$m_0 gl = \left(M + \frac{m_1}{2}\right)gh. \qquad (1)$$

Откуда следует, что

$$M = 8m_0 - \frac{m_1}{2}. \qquad (2)$$

1.3 Лебедка.



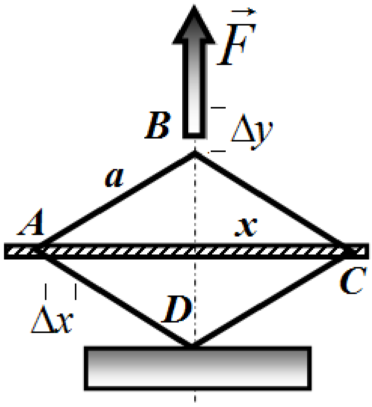
Допустим, рукоятку повернули на один оборот (при этом ее конец прошел расстояние равное $L = 2\pi l$), первая шестерня повернулась на угол $\varphi_1 = \frac{2\pi}{n_1}$. Вторая шестерня при этом повернется на угол в 2 раза меньший (так как на меньшей шестеренке в два раза меньше зубьев), угол поворота каждой следующей также будет в два раза меньше предыдущей. Следовательно, пятая шестерня повернется на угол $\varphi_5 = \frac{\varphi_1}{16}$, при этом груз поднимется на высоту

$$h = r\varphi_5 = r\frac{1}{16}\frac{2\pi}{n_1}. \qquad (1)$$

Из «золотого правила механики» следует равенство

$$F_0 L = mgh \quad \Rightarrow \quad m = F_0 \frac{L}{h} = F_0 \frac{2\pi l}{\left(r \frac{1}{16} \frac{2\pi}{n_1} \right)} = 16 n_1 \frac{l}{r} F_0 . \tag{2}$$

1.4 Домкрат.



Нам необходимо связать путь, пройденный рукояткой, с высотой подъема груза. Пусть узел ***A*** сместился на малое расстояние Δx, а груз поднялся на высоту Δy. Из теоремы Пифагора для длины стороны ромба можно записать два выражения (до смещения и после смещения)

$$\begin{gathered} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = a^2 \\ \left(\frac{x-\Delta x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+\Delta y}{2}\right)^2 = a^2 \end{gathered} . \tag{1}$$

Здесь y высота ***BD*** до начала смещения.

Раскроем скобки во втором уравнении

$$\frac{x^2 - 2x\Delta x + (\Delta x)^2}{4} + \frac{y^2 - 2y\Delta y + (\Delta y)^2}{4} = a^2 . \tag{2}$$

Так как мы считаем смещения малыми, то в этой формуле можно пренебречь еще более малыми квадратами смещений. Если теперь из уравнения (2) вычесть первое уравнение системы (1), то получим

$$-2x\Delta x + 2y\Delta y = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta y = \frac{y}{x} \Delta x . \tag{3}$$

Если рукоятка сделает один оборот (ее конец пройдет путь $S = 2\pi L$), то узел А сместится на величину шага винта $\Delta x = h$, при этом груз поднимется на величину $\Delta y = \frac{y}{x} h$. В очередной раз записываем уравнение, следующее из «золотого правила механики»

$$2\pi L F_0 = F \frac{y}{x} h \quad \Rightarrow \quad F = \frac{2\pi L}{h} \frac{x}{y} F_0 . \tag{4}$$

Подставляя численные значения, получим окончательный результат

$$F = \frac{2\pi L}{h} \frac{x}{y} F_0 = \frac{2\pi \cdot 30 см}{0{,}2 см} \cdot 2 \cdot 50\, H = 9{,}4 \cdot 10^4\, H . \tag{5}$$

Итак, грузоподъемность – более 9 Тонн, а приложенная сила всего-то 5 Килограмм!

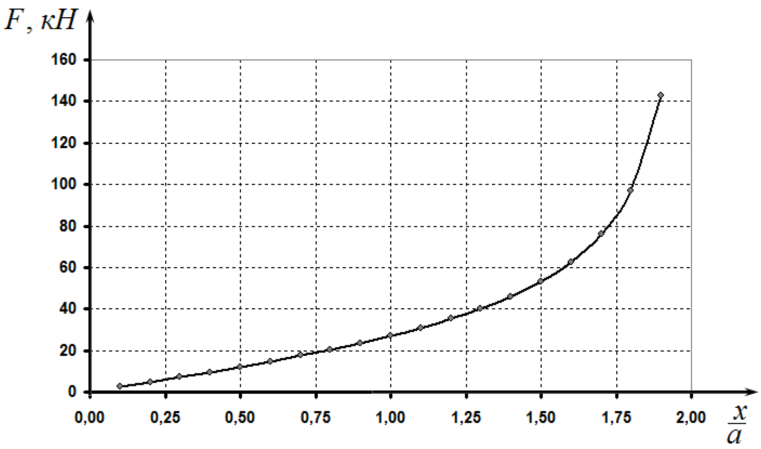
Для построения графика в формуле (4) необходимо выразить подставить y как функцию x. Эту зависимость, можно выразить из первого уравнения системы (1):

$$y = \sqrt{4a^2 - x^2} . \tag{6}$$

Таким образом, искомая функция имеет вид

$$F = \frac{2\pi L}{h} \frac{x}{y} F_0 = \frac{2\pi L}{h} F_0 \frac{x}{\sqrt{4a^2 - x^2}} = \frac{2\pi L}{h} F_0 \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{4 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = 4{,}7 \cdot 10^4 \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{4 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} . \tag{7}$$

График этой функции можно построить по точкам. При $x \to 2a$, то есть в начале подъема грузоподъемность наибольшая, по мере подъема грузоподъемность падает.



Задача 9.2. Убойная задача про убойные механизмы.

0. Уравнения движение вдоль осей:

$$x(t) = v_0 \cos\alpha t \quad (1),$$

$$y(t) = v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2} \quad (2).$$

Время полета снаряда:

$$t_n = 2\frac{v_0 \sin\alpha}{g} \quad (3).$$

Тогда дальность полета:

$$x_0 = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (4).$$

1. Проекции скорости на оси:

$$v_x = v_0 \cos\alpha - u \sin\alpha \quad (5),$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha + u \cos\alpha \quad (6),$$

$$v_z = w \quad (7).$$

2. Уравнения движения:

$$x(t) = (v_0 \cos\alpha t - u \sin\alpha)t \quad (8),$$

$$y(t) = (v_0 \sin\alpha + u \cos\alpha)t - \frac{gt^2}{2} \quad (9),$$

$$z(t) = wt \quad (10).$$

3. Время полета снаряда:

$$t_n = 2\frac{v_0 \sin\alpha + u \cos\alpha}{g} \quad (11),$$

подставляя в (8) и (10), получим:

$$x_1 = 2(v_0 \cos\alpha - u \sin\alpha)(v_0 \sin\alpha + u \cos\alpha) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} - \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} + \frac{2v_0 u \cos 2\alpha}{g} \quad (12),$$

$$z_1 = 2w\frac{v_0 \sin\alpha + u \cos\alpha}{g} \quad (13).$$

4. Величины отклонения равны:

$$\Delta x = \frac{2v_0 u \cos 2\alpha}{g} - \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (14),$$

$$\Delta z = \frac{2wv_0 \sin\alpha}{g} + \frac{2wu \cos\alpha}{g} \quad (15).$$

Т. к. $w << v_0$ и $u << v_0$, то вторыми слагаемыми в выражениях можно пренебречь. Тогда искомые постоянные равны:

$$A = \frac{2v_0 u}{g} \quad (15),$$

$$B = \frac{2v_0 w}{g} \quad (16).$$

5. Результаты расчетов представлены в таблице:

	$\alpha = 30{,}0^o$	$\alpha = 45{,}0^o$	$\alpha = 60{,}0^o$
а) $u = \pm 10{,}0 м/с$, $w = 0$	$\pm 500 м$	$0 м$	$\pm 500 м$
б) $w = \pm 10{,}0 м/с$, $u = 0$	$\pm 500 м$	$\pm 707 м$	$\pm 866 м$

Заметим, что при угле $\alpha = 45{,}0^o$ отклонение вдоль оси x получилось равным нулю. На самом деле если учесть ранее отброшенное в (13) слагаемое, то величина отклонения оказывается равной $-10 м$, что совершенно несущественно.

6. Найденные в предыдущем пункте значения - это крайние точки искомой области. Но чем больше скорость вдоль одного направления, тем меньше она вдоль другого. Поэтому точки необходимо соединить кривой, похожей (неужели?) на эллипс. В зависимости от угла, эта область будет иметь различную протяженность вдоль соответствующих осей. При угле $\alpha = 30{,}0^o$ - это круг. А при угле $\alpha = 45{,}0^o$ - прямая линия (см. рис. 1).

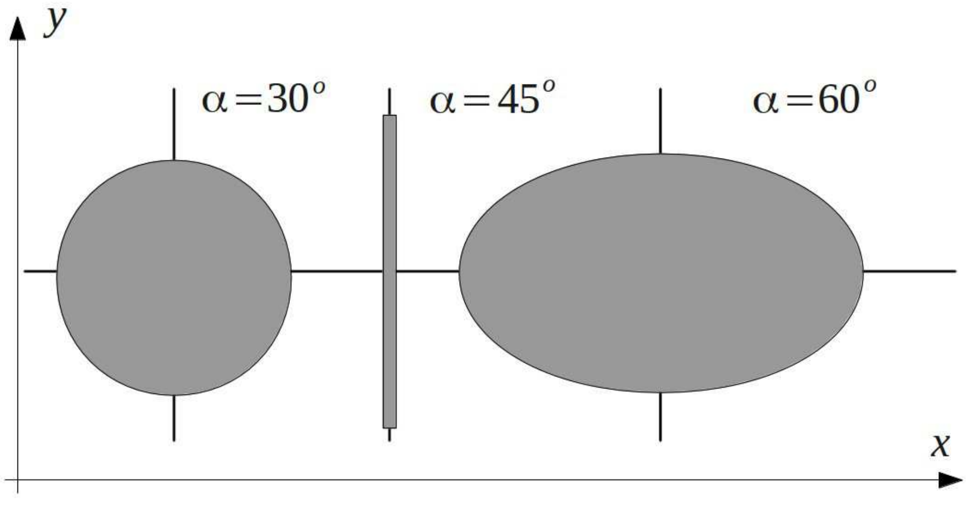


Рис. 1.

Задача 9.3 Большая теплая задача про тепловые большие механизмы.

Часть 1. Что мы имеем?

1.1 Расчет массы m_1 нагреваемой воды производим по известной формуле для теплообмена

$$Q_0 = cm_1(t_1 - t_0) \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{Q_0}{c(t_1 - t_0)} = \frac{3{,}6 \cdot 10^{16} \cdot 4{,}21}{4{,}21 \cdot 10^3 \cdot (90 - 20)} \text{кг} = 5{,}1 \cdot 10^{11} \text{кг} = 5{,}1 \cdot 10^8 \text{ т},$$

где $Q_0 = 3{,}6 \cdot 10^{16}$ кал $= 1{,}5 \cdot 10^{17}$ Дж – количество теплоты (энергии), произведенное в нашей стране за год.

1.2 Для производства этого же количества энергии Q_0 необходимо сжечь массу нефти m_2. С учетом КПД нагревательной установки имеем

$$Q_0 = qm_2\eta \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{Q_0}{q\eta} = \frac{3{,}6 \cdot 10^{16} \cdot 4{,}21}{4{,}0 \cdot 10^7 \cdot 0{,}80} \text{кг} = 4{,}7 \cdot 10^9 \text{ кг} = 4{,}7 \cdot 10^6 \text{ т}.$$

1.3 При разгоне нагретой воды насосы совершают работу A по увеличению кинетической энергии воды, следовательно (работой сил вязкого трения воды в трубах пренебрегаем)

$$A = \frac{m_1 \upsilon^2}{2} = \frac{5{,}1 \cdot 10^{11} \cdot (10)^2}{2} \text{Дж} = 2{,}6 \cdot 10^{13} \text{ Дж}.$$

1.4 С учетом результата, полученного в пункте 1.3, найдем массу нефти, которую (с учетом коэффициента полезного действия) необходимо дополнительно сжечь для обеспечения работы насосных станций

$$qm_3\eta = A \quad \Rightarrow \quad m_3 = \frac{A}{q\eta} = \frac{2{,}6 \cdot 10^{13}}{4{,}0 \cdot 10^7 \cdot 0{,}40} \text{кг} = 1{,}6 \cdot 10^6 \text{ кг} = 1{,}6 \cdot 10^3 \text{ т}.$$

1.5 Суммарная стоимость всей нефти (и на нагрев воды, и на работу насосных станций), если ее объем выразить в баррелях (b) будет равна

$$C = c_0 \cdot b = 150 \cdot \frac{m_2 + m_3}{\rho} \cdot \frac{1}{V_0} = 150 \frac{(4{,}7 \cdot 10^9 + 1{,}6 \cdot 10^6)}{0{,}864 \cdot 10^3} \cdot \frac{1}{159 \cdot 10^{-3}} \text{долларов} = ,$$
$$= 5{,}1 \cdot 10^9 \text{ долларов} = 5{,}1 \text{ млрд. долл.}$$

где $c_0 = 150\,\text{USD/баррель}$.

1.6 Пусть горячая вода массой m_1 проходит к потребителю по трубам (за год $t = 365 \cdot 24 \cdot 3600\,\text{с} = 3{,}15 \cdot 10^7$ с) со скоростью υ, тогда

$$m_1 = \rho \upsilon S t \quad \Rightarrow \quad S = \frac{m_1}{\rho \upsilon t} = \frac{5{,}1 \cdot 10^{11}}{1{,}0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600} \text{ м}^2 = 1{,}6 \text{ м}^2.$$

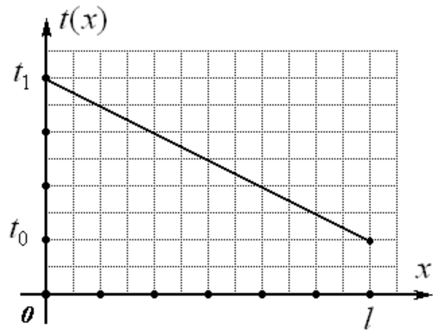
Часть 2. Можно ли сэкономить?

2.1 Поток теплоты при перекачке воды «традиционным» способом по трубам считаем по определению

$$q = \frac{cm\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{c\rho \upsilon S\Delta t\Delta \tau}{\Delta \tau} = c\rho \upsilon S\Delta t = 4{,}2\cdot 10^3 \cdot 1{,}0\cdot 10^3 \cdot 10\cdot 3{,}14\cdot (2{,}5\cdot 10^{-2})^2 \cdot 70\ \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = .$$
$$= 5{,}8\cdot 10^6\ Вт$$

2.2.1 Согласно формуле (1), приведенной в справочных материалах, для обеспечения постоянного потока теплоты вдоль стержня температура стержня должна уменьшаться на постоянную величину Δt при смещении на фиксированное расстояние l по стержню. Это соответствует линейной зависимости $t(x)$, следовательно

$$t(x) = t_1 - \frac{(t_1 - t_0)}{l}x\ .$$



2.2.2 Для расчета количества теплоты, необходимой для нагрева стержня необходимо учесть, что температуры различных участков стержня различны. В данном случае (при линейном распределении температур) можно использовать среднюю температуру

$$Q_1 = cm\frac{t_1 - t_0}{2} = 0{,}39\cdot 10^3 \cdot 8{,}9\cdot 10^3 \cdot 3{,}14\cdot (2{,}5\cdot 10^{-2})^2 \cdot 10\cdot \frac{90-20}{2}\ \text{Дж} = 2{,}4\cdot 10^6\ \text{Дж}\ .$$

2.2.3 В установившемся режиме поток теплоты по стержню найдем, используя формулу (1) из справочных материалов

$$q = \lambda\frac{t_1 - t_0}{l} = 390\cdot\frac{90-20}{10}\ \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = 2{,}7\cdot 10^3\ Вт\ .$$

2.3 При теплопереносе посредством испарения и конденсации воды следует учесть теплоту конденсации пара и остывания получившейся затем воды от температуры $t_1 = 90°C$ до температуры $t_0 = 20°C$. При этом количество выделившейся теплоты

$$Q = m(L + c\Delta t) = \rho S\upsilon\Delta\tau(L + c\Delta t)\ .$$

Соответственно, поток теплоты, переносимый паром в такой установке (кинетической энергией пара пренебрежем в силу ее малости по сравнению с энергией Q)

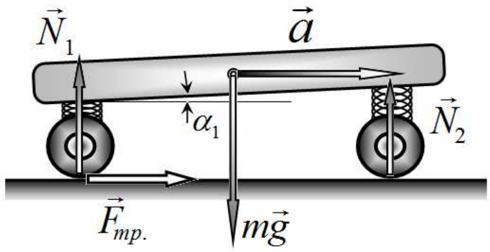
$$q = \frac{Q}{\Delta\tau} = \rho S\upsilon(L + c\Delta t) = 0{,}70\cdot 3{,}14\cdot (2{,}5\cdot 10^{-2})^2 \cdot 50\cdot (2{,}25\cdot 10^6 + 4{,}2\cdot 10^3 \cdot 70)\ \frac{\text{Дж}}{\text{с}}\ .$$
$$= 1{,}7\cdot 10^5\ Вт$$

10 класс.

Задача 10. 1. Лихач (не задирай носа)

Часть 1. Поехали - старт и разгон.

1.1-1.3 *На первый взгляд, ответы на первую часть задачи находятся элементарно: автомобиль разгоняет сила трения, которая на горизонтальной дороге равна* μmg*. Однако, этот ответ не верен! Ведущими колесами являются только задние колеса, поэтому необходимо учитывать силу трения, действующую только на эти колеса. Это приводит к необходимости более подробного рассмотрения.*



На рис. 1 изображены внешние силы, действующие на автомобиль во время его разгона. Понятно, что единственной горизонтальной силой, сообщающей ускорение автомобилю, является сила трения $\vec{F}_{тр.}$, действующая со стороны дороги на задние ведущие колеса автомобиля. По закону Кулона-Амонтона эта сила равна

$$F_{тр.} = \mu N_1, \tag{1}$$

где N_1 - сила нормальной реакции, действующая на задние колеса.

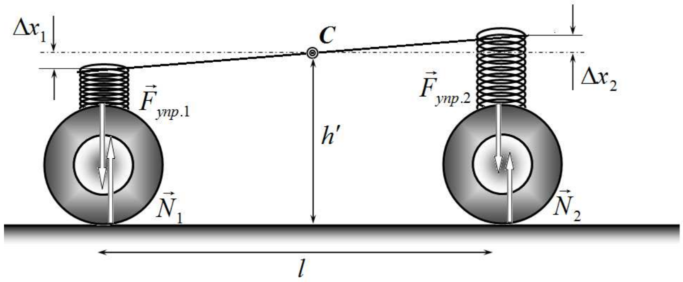
Не смотря на то, что центр масс нашего автомобиля находится на его середине, нагрузка на дорогу во время ускоренного движения распределяется неравномерно между колесами. Для определения сил запишем уравнения:
второго закона Ньютона для автомобиля в проекции на вертикальное направление:

$$N_1 + N_2 = mg\,, \tag{2}$$

здесь N_2 - сила реакции, действующая на передние колеса;
условие равенства нулю моментов сил относительно центра масс автомобиля:

$$F_{тр.}\cdot h' + N_2\frac{l}{2} - N_1\frac{l}{2} = 0\,, \tag{3}$$

где h' - высота центра масс автомобиля над дорогой в процессе разгона. Так как корпус автомобиля при разгоне наклоняется, то не очевидно, что эта высота не изменяется. Возможное изменение высоты центра масс можно найти, рассматривая деформации пружин подвески (рис. 2). Обозначим $\Delta x_1, \Delta x_2$ - дополнительные (к величине x_0) деформации задней и передней подвески. Так как в вертикальном направлении колеса не движутся, то силы упругости, действующие на колеса, уравновешиваются силами реакции со стороны дороги (массой колес пренебрегаем), поэтому с учетом закона Гука можно записать



$$\begin{aligned} N_1 &= F_{упр.1} = k(x_0 + \Delta x_1) \\ N_2 &= F_{упр.2} = k(x_0 + \Delta x_2) \end{aligned}. \tag{4}$$

Теперь с использованием уравнения (2) и очевидного соотношения для покоящегося автомобиля $mg = 2kx_0$, получим

$$k(x_0 + \Delta x_1) + k(x_0 + \Delta x_2) = 2kx_0\,, \tag{5}$$

откуда следует, что

$$\Delta x_2 = -\Delta x_1\,, \tag{6}$$

то есть, на сколько сожмется задняя подвеска, на столько же поднимется передняя. В этом случае, как следует из рис. 2, высота центра масс автомобиля не изменяется, то есть

$$h' = h\,. \tag{7}$$

Кроме того, угол наклона кузова автомобиля может быть выражен из деформации пружин посредством соотношения

$$\alpha_1 = 2\frac{\Delta x_1}{l}\,, \tag{8}$$

где величина деформации выражается из уравнений (4)

$$\Delta x_1 = \frac{N_1 - N_2}{2k} = x_0 \frac{N_1 - N_2}{mg}\,. \tag{9}$$

Вернемся к системе уравнений (1)-(3), так как мы показали, что $h' = h$, то эта система из трех уравнений содержит три неизвестных величины (сила трения и силы реакций), поэтому может быть решена.

Перепишем уравнения (3) и (2) в виде

$$\begin{aligned} N_1 - N_2 &= F_{тр.} \cdot \frac{2h}{l}\,, \\ N_1 + N_2 &= mg \end{aligned} \tag{10}$$

и сложим их, в результате получим

$$N_1 = \frac{1}{2}\left(mg + F_{тр.} \cdot \frac{2h}{l} \right). \tag{11}$$

Подставим это выражение в уравнение (1)

$$F_{тр.} = \mu \frac{1}{2}\left(mg + F_{тр.} \cdot \frac{2h}{l} \right)$$

из которого находим

$$F_{тр.} = \frac{\mu mg}{2\left(1 - \mu \dfrac{h}{l}\right)}\,. \tag{12}$$

Ускорение автомобиля найдем с помощью второго закона Ньютона:

$$F_{\text{тр.}} = ma_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu mgl}{2(l - \mu h)} = ma_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{\mu gl}{2(l - \mu h)}\,. \tag{13}$$

Проведем вычисления. Если водитель стартует так, что колеса не проскальзывают, то максимальное ускорение достигается при максимальном коэффициенте трения покоя, $\mu = \mu_{\text{п}}$. В результате:

$$a_{1,\text{п}} = \frac{0{,}90 \cdot 9{,}81 \cdot 3{,}5}{2 \cdot (3{,}5 - 0.90 \cdot 0{,}40)} = 4{,}9\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right). \tag{14}$$

Модуль скорости, которой достигнет автомобиль при максимальном ускорении:

$$\upsilon_1 = a_{\max} \Delta t = 4{,}9 \cdot 5{,}0 = 24{,}5\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right) = 89\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}\,. \tag{15}$$

Наконец, последовательно подставляя «снизу вверх» от формулы (12) в (10), (9), (8)
Находим угол наклона корпуса автомобиля

$$\alpha_1 = \frac{2\mu\, x_0 h}{(l - \mu h)}\,. \tag{16}$$

Подстановка численных значений дает результат

$$\alpha_1 = \frac{2\mu_{\text{п}} x_0 h}{l(l - \mu_{\text{п}} h)} = \frac{2 \cdot 0{,}90 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}40}{3{,}5(3{,}5 - 0{,}90 \cdot 0{,}40)} = 0{,}00655\,(\text{рад}) = 0{,}38°$$

1.4 Если водитель «рвет с места», то коэффициент трения – это коэффициент трения скольжения, $\mu = \mu_c$. В результате его ускорение оказывается меньше

$$a_{1,c} = \frac{0,80 \cdot 9,81 \cdot 3,5}{2 \cdot (3,5 - 0.80 \cdot 0,40)} = 4,3\left(\frac{м}{с^2}\right). \qquad (13)$$

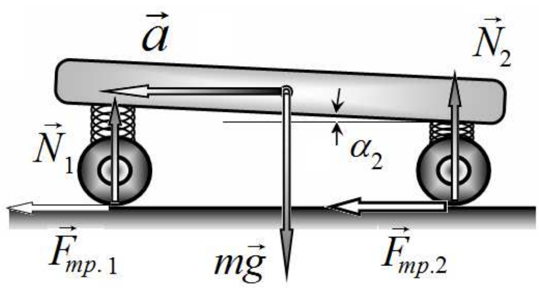
Однако, если учесть, что колеса и особенно задний мост имеют определенный момент инерции, то в такой ситуации момент сил, будет отличным от нуля. В этом случае момент силы, действующей на корпус автомобиля со стороны двигателя, может стать таким, что весь вес автомобиля придется на задние колеса (передние колеса оторвутся от земли). В этом случае ускоряющая сила трения может достичь величины $\mu_c mg$, а ускорение станет равным $\mu_c g = 8,0\frac{м}{с}$.

<u>Примечание - пояснение.</u> *Задачу можно решать, рассматривая не весь автомобиль целиком, а только его корпус. На ведущие колеса автомобиля со стороны механизма, связанного с двигателем, действует момент сил $M_к$, вращающий их по часовой стрелке вокруг оси O_1 колесной пары. Если пренебречь массой (моментом инерции), колес, то такой же по модулю, но противоположно направленный момент сил $M_{дв} = M_к$ действует на автомобиль, разворачивающий его против часовой стрелки.*

Часть 2 Приехали – торможение и остановка.

2.1 При резком торможении, когда вращение колес прекращается, тормозящей силой является суммарная сила трения, действующая на колеса автомобиля. Так коэффициенты трения передних и задних колес одинаковы, то

$$F_{тр.1} + F_{тр.2} = \mu(N_1 + N_2) = \mu mg \qquad (18).$$



Поэтому модуль ускорения, с которым тормозит автомобиль, равен

$$a = \frac{F_{тр.1} + F_{тр.2}}{m} = \mu g . \qquad (19)$$

Тормозной путь автомобиля может быть рассчитан по кинематической формуле

$$S = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2\mu g}. \qquad (20)$$

Подстановка численных значений (конечно, надо брать коэффициент трения скольжения) приводит к результату

$$s = \frac{v_0^2}{2\mu_c g} = \frac{25^2}{2 \cdot 0,80 \cdot 9,81} = 40\,(м). \qquad (21)$$

2.2 Так как «геометрия автомобиля» не изменилась, то для расчета его угла наклона можно воспользоваться ранее полученными формулами (8)-(9), с заменой индексов

$$\alpha_2 = 2\frac{\Delta x_2}{l} = 2x_0\frac{N_2 - N_1}{mgl}. \qquad (22)$$

Для определения разности сил реакций в данном случае также следует воспользоваться уравнением моментов относительно центра масс автомобиля

$$(F_{тр.1} + F_{тр.2})h + N_1\frac{l}{2} - N_2\frac{l}{2} = 0 \qquad (23)$$

Из которого следует, что

$$N_2 - N_1 = \left(F_{тр.1} + F_{тр.2}\right)\frac{2h}{l} = \mu mg\,\frac{2h}{l}\,. \tag{24}$$

Таким образом, получаем, что угол наклона корпуса автомобиля при торможении рассчитывается по формуле

$$\alpha_2 = 2x_0\,\frac{N_2 - N_1}{mgl} = 4\mu\,\frac{hx_0}{l^2}\,. \tag{25}$$

Подстановка численных значений дает

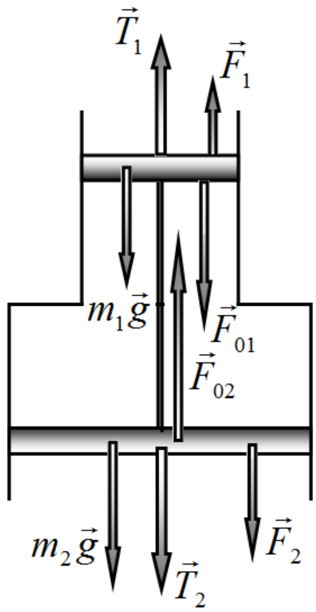
$$\alpha_2 = \frac{4\mu_с x_0 h}{l^2} = \frac{4\cdot 0{,}80\cdot 0{,}10\cdot 0{,}40}{3{,}5^2} = 0{,}010\ (\text{рад}) = 0{,}60^\circ\,. \tag{26}$$

2.3 Тормозной путь можно уменьшить так, чтобы колеса тормозили так, чтобы не было проскальзывания. В этом случае сила трения будет определяться коэффициентом трения покоя. Расчет по формуле (20) в этом случае приводит к результату

$$s' = \frac{\upsilon_x^2}{2\mu_п g} = \frac{25^2}{2\cdot 0{,}90\cdot 9{,}81} = 35\,(\text{м})\,. \tag{27}$$

Возможно, 5 м спасут чью-то жизнь.

Задача 10.2. Две трубы, два поршня, две части…



2.1. 2.2 На рисунке изображены силы, действующие на поршни. Предполагаем, что стержень сжат, если это не так, то в результате решения получим отрицательное значение для силы упругости. Так как расстояние между поршнями мало, то считаем, что давление воздуха между поршнями постоянно по высоте. Так же можно пренебречь массой воздуха между поршнями.

Условия равновесия поршней имеют вид:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_{01} + \vec{T}_1 + m_1\vec{g} = 0, \qquad (1)$$

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_{02} + \vec{T}_2 + m_2\vec{g} = 0. \qquad (2)$$

Здесь $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ – силы давления воздуха внутри цилиндров на верхний и нижний поршни поршень (их модули равны $F_1 = pS_1$, $F_2 = pS_2$); $\vec{F}_{01}, \vec{F}_{02}$ - силы атмосферного давления, действующие на поршни (их модули - $F_{01} = p_0 S_1$, $F_{02} = p_0 S_2$); $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ – силы тяжести, действующие поршни; $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ – силы взаимодействия со стержнем верхнего и нижнего поршней соответственно, (поскольку стержень невесомый то модули этих сил одинаковы $T_1 = T_2 = T$).

В проекциях на вертикальную ось эти уравнения имеют вид:

$$pS_1 - p_0 S_1 + T - m_1 g = 0, \qquad (3)$$

$$-pS_2 + p_0 S_2 - T - m_2 g = 0. \qquad (4)$$

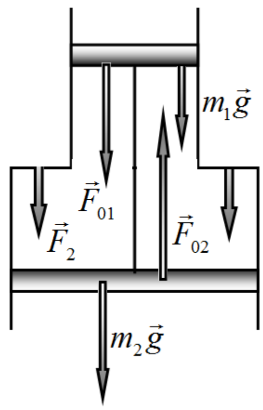
Решая систему уравнений (3) и (4), получим:

$$p = p_0 - \frac{m_1 + m_2}{S_2 - S_1} g; \qquad (5)$$

$$T = \frac{m_1 S_2 + m_2 S_1}{S_2 - S_1} g \qquad (6)$$

Из соотношения (6) следует, что при любых значениях параметров найденная сила упругости положительна, значит исходное предположение о том, что стержень сжат - верно.

После подстановки численных значений получаем $p = 99$ кПа, $T = 5{,}3 H$.



1.3 Очевидными внешними силами, действующими на выделенную систему, являются силы тяжести и силы атмосферного давления. Однако сумма сил атмосферного давления $p_0(S_2 - S_1)$, как следует из формулы (5)

$$p_0(S_2 - S_1) = (m_1 + m_2)g + p(S_2 - S_1). \qquad (7)$$

превышает, силу тяжести поршней!

Причина несоответствия в том, что на газ со стороны стенок действует сила, равная по третьему закону Ньютона силе давления газа. Конечно, сумма этих сил, действующих со стороны боковых стенок равна нулю. Но есть еще сила $\vec{F}_2$, действующая со стороны торца стыка, модуль которой равен $F_2 = p(S_2 - S_1)$. Именно эта сила входит в равенство (7), которое и является условием равновесия выделенной системы.

Вспомните объяснение гидростатического парадокса – сила давления на дно сосуда может быть больше веса налитой в него жидкости.

Заметим, что при правильном понимании физической ситуации уравнение (7) могло быть записано сразу и положено в основу решения данной части задачи.

1.4 Обозначим (p_1, V_1), (p_2, V_2) - давление и объем воздуха между поршнями до и после изменения атмосферного давления, соответственно.
Так как температура не изменилась, то для воздуха внутри труб выполняется закон Бойля-Мариотта

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 . \tag{7}$$

Из уравнения (5) следует, что изменение атмосферного давления на величину Δp приводит к такому же изменению давления между поршнями, поэтому уравнение (7) можно записать в виде

$$p_1 V_1 = (p_2 + \Delta p)(V_1 + \Delta V) \tag{8}$$

Где $V_1 = \dfrac{l}{2}(S_2 + S_1)$ - объем воздуха до опускания поршней, $\Delta V = \Delta h(S_2 - S_1)$ - его изменение при опускании. Из этого уравнения следует, что изменение давления равно

$$\Delta p = p_1 \frac{V_1}{V_1 + \Delta V} - p_1 = -p_1 \frac{\Delta V}{V_1 + \Delta V} = -\frac{p_1}{\dfrac{l(S_2 + S_1)}{2\Delta h(S_2 - S_1)} + 1}, \tag{9}$$

где p_1 - подсчитанное ранее давление (5). Подстановка численных значений приводит к результату $\Delta p_0 = 5{,}6\,\text{кПа}$.

Можно еще более упростить решение, если заметить, что относительное изменение объема мало, поэтому мало и относительное изменение атмосферного давления. Тогда из уравнения $PV = const$ *следует* $P\Delta V + \Delta P \cdot V = 0$ *.Отсюда находим* $\Delta P = -P\dfrac{\Delta V}{V}$*, что совпадает с формулой (9), если в ней пренебречь малой величиной* ΔV *в знаменателе.*

1.5 – 1.6 Так как массы поршней симметрично входят в формулу (5) для давления воздуха между ними, поэтому последние два пункта задачи имеют одинаковые решения. Если верхний поршень опустится до стыка труб, то давление воздуха между поршнями станет равным (из закона Бойля-Мариотта)

$$p_2 = p_1 \frac{V}{V_1} = p_1 \frac{\frac{l}{2}(S_1 + S_2)}{S_2 l} = \frac{p_1}{2}\left(\frac{S_1}{S_2} + 1\right). \tag{10}$$

Изменение давление соответственно равно

$$p_2 - p_1 = \frac{p_1}{2}\left(\frac{S_1}{S_2} + 1\right) - p_1 = -\frac{p_1}{2}\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right). \tag{11}$$

Из уравнения (5) следует, что изменение давления связано с изменением массы поршней соотношением

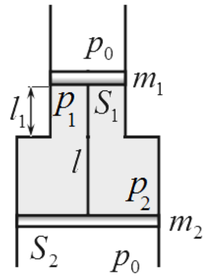
$$\Delta p = -\frac{\Delta m}{S_2 - S_1} g . \tag{12}$$

Приравнивая эти выражения, получим

$$\frac{\Delta m}{S_2 - S_1} g = \frac{p_1}{2}\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta m = \frac{p_1 (S_2 - S_1)}{2g}\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right) \approx 4{,}5\,кг . \tag{13}$$

Часть 2. Вода.

Ход решения данной части задачи аналогичен решению предыдущей части, с воздухом между поршнями (только результаты получатся противоположными!). Главное отличие заключается в том, что объем воды остается постоянным, поэтому поршни сдвигаться не могут. Кроме того, необходимо учесть изменение давления с высотой (гидростатическое давление).



2.1 Уравнения равновесия поршней аналогичны уравнениям (3)-(4), поэтому перепишем их без особых комментариев

$$p_1S_1 - p_0S_1 + T - m_1g = 0, \quad (14)$$

$$-p_2S_2 + p_0S_2 - T - m_2g = 0. \quad (15)$$

Здесь обозначено: p_1 - давление воды на верхний поршень, $p_2 = p_1 + \rho gl$ - давление воды на нижний поршень.

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$p_1 = p_0 - \frac{(m_1 + m_2)g + \rho glS_2}{S_2 - S_1}. \quad (16)$$

$$T = \frac{m_1S_2 + m_2S_1 + \rho lS_1S_2}{S_2 - S_1}g. \quad (17)$$

Из формулы (17) следует, что и в данном случае стержень всегда растянут!

2.2 Когда груз находится на верхнем поршне сила его натяжения равна

$$T_1 = \frac{(m_1 + M)S_2 + m_2S_1 + \rho lS_1S_2}{S_2 - S_1}g, \quad (18)$$

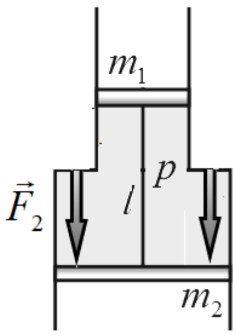
А если его подвесить к нижнему поршню, то она станет равной

$$T_2 = \frac{m_1S_2 + (m_2 + M)S_1 + \rho lS_1S_2}{S_2 - S_1}g. \quad (19)$$

Следовательно, изменение этой силы равно

$$T_2 - T_1 = -Mg \quad (20)$$

т.е. уменьшается на силу тяжести груза.



2.3 Помимо сил тяжести и сил атмосферного давления, на воду и поршни действует сила со стороны выступа торца - F_2.

$$F_2 = p'(S_2 - S_1) \quad (22)$$

где $p' = p_1 + \rho gl_1 = p_0 - \dfrac{(m_1 + m_2)g + \rho glS_2}{S_2 - S_1} + \rho gl_1$ - давление на уровне стыка труб. Тем самым получаем, что рассматриваемая сила равна

$$\begin{aligned} F_2 &= p'(S_2 - S_1) = \left(p_0 - \frac{(m_1 + m_2)g + \rho glS_2}{S_2 - S_1} + \rho gl_1\right)(S_2 - S_1) = \\ &= p_0(S_2 - S_1) - (m_1 + m_2)g - \rho glS_2 + \rho gl_1(S_2 - S_1) = \\ &= p_0(S_2 - S_1) - (m_1 + m_2)g - \rho g(S_1l_1 + S_2(l - l_1)) \end{aligned} \quad .(23)$$

Последнее слагаемое в этой формуле есть ни то иное, как сила тяжести, действующая на воду. Тем самым мы показали, что система находится в равновесии:

$$p_0(S_2 - S_1) = M_{общ.}g + F_2. \quad (24)$$

где $M_{общ.}$ - общая масса воды и поршней.

2.4 Формально, условие равновесия (24) может выполняться и при отсутствии атмосферного давления, правда при этом и сила F_2 и давление внутри жидкости станут отрицательными – жидкость повиснет на торце! Однако, при уменьшении атмосферного давления будет уменьшаться и давление внутри жидкости. Когда последнее опустится до давления насыщенного пара, жидкость закипит, то есть разорвется. Поэтому в реальности равновесия при отсутствии внешнего давления быть не может.

2.5 Итак условием разрыва жидкости является понижении ее давления до давления насыщенного пара. Минимальное давление жидкости в рассматриваемой системе - у верхнего поршня, поэтому условие разрыва имеет вид

$$p_1 = p_0 - \frac{(m_1 + m_2 + M)g + \rho g l S_2}{S_2 - S_1} = p_{нас.} \qquad (25)$$

При комнатной температуре давление насыщенного пара значительно меньше нормального атмосферного давления $p_{нас.} << p_0$, поэтому приближенно (но с высокой степенью точности) уравнение (25) приводит к уравнению

$$p_0 - \frac{(m_1 + m_2 + M)g + \rho g l S_2}{S_2 - S_1} = 0. \qquad (26)$$

Из которого следует, что максимальная масса груза равна

$$M_{\max} = \frac{p_0 (S_2 - S_1)}{g} - \rho l S_2 - m_1 - m_2. \qquad (27)$$

Задача 10.3. В чем причина возникновения поверхностного натяжения?

Часть 1. Описание взаимодействия двух молекул.

1.1 Равновесному расстоянию соответствует минимум потенциальной энергии. Не сложно найти точку экстремума функции (1). Для этого обозначим $z=\dfrac{1}{r^6}$. Для этой переменной функция (1) является квадратичной

$$U=az^2-bz\,. \tag{1}$$

Точка минимума этой функции

$$z_0=\frac{b}{2a}\,, \tag{2}$$

Следовательно, равновесное расстояние удовлетворяет условию

$$r_0^6=\frac{2a}{b}\,. \tag{3}$$

Значение минимальной потенциальной энергии равно

$$U(z_0)=a\left(\frac{b}{2a}\right)^2-b\frac{b}{2a}=-\frac{b^2}{4a}=-U_0 \tag{4}$$

Привести функцию (1) к виду можно разными способами, например, с помощью цепочки преобразований

$$\begin{aligned}U&=\frac{a}{r^{12}}-\frac{b}{r^6}=\frac{1}{r_0^{12}}\left(a\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}-br_0^6\left(\frac{r_0}{r}\right)^6\right)=\frac{1}{r_0^{12}}\left(a\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}-b\frac{2a}{b}\left(\frac{r_0}{r}\right)^6\right)=\\&=\frac{a}{r_0^{12}}\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}-2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6\right)=\frac{b^2}{4a}\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}-2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6\right)=U_0\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}-2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6\right)\end{aligned}\,. \tag{5}$$

1.2 Для проведения разложений функций сначала рассмотрим преобразование степеней в общем виде

$$\left(\frac{r_0}{r}\right)^\gamma=\left(\frac{r_0}{nr_0+r_0\delta}\right)^\gamma=\frac{1}{n^\gamma}\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^{-\gamma}\approx\frac{1}{n^\gamma}-\frac{\gamma}{n^{\gamma+1}}\delta\,. \tag{6}$$

Применение этой формулы энергии взаимодействия (2) приводит к результату

$$\begin{aligned}U(nr_0+r_0\delta)&=U_0\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}-2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6\right)\approx U_0\left(\frac{1}{n^{12}}-\frac{12}{n^{13}}\varepsilon-\frac{2}{n^6}+\frac{12}{n^7}\delta\right)=\\&=U_0\left(\left(\frac{1}{n^{12}}-\frac{2}{n^6}\right)+\left(\frac{12}{n^7}-\frac{12}{n^{13}}\right)\delta\right)\end{aligned} \tag{7}$$

Следовательно, коэффициенты разложения равны

$$\begin{aligned}u_n&=\left(\frac{1}{n^{12}}-\frac{2}{n^6}\right)=-\frac{2}{n^6}\left(1-\frac{1}{2n^6}\right)\\s_n&=12\left(\frac{1}{n^7}-\frac{1}{n^{13}}\right)=\frac{12}{n^7}\left(1-\frac{1}{n^6}\right)\end{aligned}\,. \tag{8}$$

Аналогичное разложение для силы (3) дает

$$\begin{aligned}F(nr_0+r_0\delta)&=F_0\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{13}-\left(\frac{r_0}{r}\right)^7\right)\approx F_0\left(\frac{1}{n^{13}}-\frac{13}{n^{14}}\delta-\frac{1}{n^7}+\frac{7}{n^8}\delta\right)=\\&=F_0\left(\left(\frac{1}{n^{13}}-\frac{1}{n^7}\right)+\left(\frac{7}{n^8}-\frac{13}{n^{14}}\right)\delta\right)\end{aligned}\,. \tag{9}$$

Коэффициенты этого разложения равны

$$\begin{aligned} f_n &= \left(\frac{1}{n^{13}} - \frac{1}{n^7}\right) = -\frac{1}{n^7}\left(1 - \frac{1}{n^6}\right) \\ c_n &= \left(\frac{7}{n^8} - \frac{13}{n^{14}}\right) = \frac{7}{n^8}\left(1 - \frac{13}{7n^6}\right) \end{aligned}. \qquad (10)$$

Результаты расчетов коэффициентов приведены в таблице (1).

Таблица 1. Коэффициенты разложений.

n	u_n	s_n	f_n	c_n
1	-1	0	0	-6
2	$-3{,}10\cdot10^{-2}$	$9{,}23\cdot10^{-2}$	$-7{,}69\cdot10^{-3}$	$2{,}66\cdot10^{-2}$
3	$-2{,}74\cdot10^{-3}$	$5{,}48\cdot10^{-3}$	$-4{,}57\cdot10^{-4}$	$1{,}06\cdot10^{-3}$
4	$-4{,}88\cdot10^{-4}$	$7{,}32\cdot10^{-4}$	$-6{,}10\cdot10^{-5}$	$1{,}07\cdot10^{-4}$
5	$-1{,}28\cdot10^{-5}$ -	$1{,}54\cdot10^{-4}$	$-1{,}28\cdot10^{-5}$	$1{,}79\cdot10^{-5}$
сумма	-1,03	$9{,}87\cdot10^{-2}$	$-8{,}22\cdot10^{-3}$	-5,97

Отметим, что числа в верхней строке являются точными и… понятными: потенциальная энергия в минимуме равна -1, а коэффициент s_n равен нулю, так как это точка экстремума, сила в этой точке равна нулю. В нижней строчке приведены суммы этих коэффициентов, которые нам понадобятся в дальнейшем. Также важно отметить, что все эти коэффициенты быстро убывают с ростом n, что соответствует быстрому убыванию, как силы, так и энергии взаимодействия при увеличении расстояния между молекулами.

Часть 2. Бесконечная цепочка молекул.

2.1 Цепочка может находиться в равновесии при любых равных расстояниях между молекулами! Действительно, относительно любой молекулы остальные расположены симметрично. Поэтому суммарная сила, действующая на каждую молекулу равна нулю. Однако эти положения равновесия не будут устойчивыми.

2.2 Для поиска устойчивого равновесия необходимо найти положение минимума потенциальной энергии, приходящейся на одну молекулу.

Дополнение, не входящее в основное решение.

Для нахождения экстремума (который будет находиться не слишком от точки $\varepsilon = 0$) следует разложить формулу для потенциальной энергии до квадратичного слагаемого, используя следующий член в разложении степенной функции

$$(1+x)^\gamma \approx 1 + \gamma x + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}x^2.$$

Для расстояния между молекулами, близкими к nr_0 величина $\delta = nr_0$, поэтому

$$\left(\frac{r_0}{r}\right)^\gamma = \left(\frac{r_0}{nr_0 + nr_0\varepsilon}\right)^\gamma = \frac{1}{n^\gamma}(1+\varepsilon)^{-\gamma} \approx \frac{1}{n^\gamma}\left(1 - \gamma\varepsilon + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2}\varepsilon^2\right).$$

Применяя эту формулу к потенциальной энергии взаимодействия одной частицы с другой, находящейся на расстоянии близком к nr_0, получим

$$U_n = U_0\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right) \approx U_0\left(\frac{1}{n^{12}}\left(1-12\varepsilon+78\varepsilon^2\right) - \frac{2}{n^6}\left(1-6\varepsilon+21\varepsilon^2\right)\right) =$$

$$= U_0\left(\left(\frac{1}{n^{12}} - \frac{2}{n^6}\right) + \left(\frac{12}{n^6} - \frac{12}{n^{12}}\right)\varepsilon + \left(\frac{78}{n^{12}} - \frac{42}{n^6}\right)\varepsilon^2\right)$$

Далее, эту энергию следует просуммировать по всем n *от нуля до бесконечности. Такое суммирование приводит к следующему выражению для потенциальной энергии одной частицы*

$$U_n = U_0\left(-1{,}03 + 0{,}0987\,\varepsilon + 35{,}3\varepsilon^2\right)$$

Экстремум этой функции и соответствует значению $\varepsilon = +1{,}4\cdot 10^{-3}$, *приведенному в условии задачи. Качественно этот результат понятен – притяжение дальних (на расстояниях больших* r_0*) соседей незначительно увеличивает расстояние между соседними молекулами.*

2.3 Для вычисления энергии w одной молекулы (точнее, приходящейся на одну молекулу) необходимо просуммировать энергию ее взаимодействия со всеми молекулами и не забыть разделить ее на два, ведь энергия взаимодействия – это энергия пары молекул! Для такого суммирования можно воспользоваться приближенной формулой для энергии взаимодействия, поэтому

$$w = \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n + s_n\varepsilon\right) \tag{10}$$

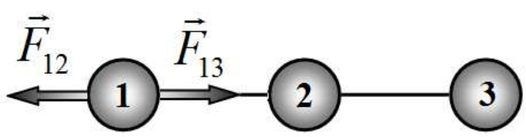
Так как коэффициенты разложения очень быстро убывают, то можно получить результат с требуемой точностью, ограничив сумму пятью слагаемыми, в этом случае (с использованием коэффициентов из Таблицы 1) получаем

$$w_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n + s_n\varepsilon\right) = \sum_{n=1}^{\infty}u_n + \varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}s_n = -1{,}03 + 1{,}4\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}87\cdot 10^{-2} \approx -1{,}03\,. \tag{11}$$

Заметьте, что основной вклад в поправку (всего то 3%) дает взаимодействие с более далекими соседями, рассчитанной в предположении, что все молекулы находятся на расстоянии r_0. Поправка на растянутость цепочки имеет порядок 10^{-4}.

Для проверки мы провели расчет по двадцати слагаемым: результат $w = -1{,}0343$.

Часть 3. Цепочка из трех молекул.



3.1. Относительное изменение расстояния между молекулами ε (здесь оно одинаково) можно найти, записав условие равновесия крайних молекул

$$F_{12} + F_{23} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1\varepsilon + f_2 + 2c_2\varepsilon = 0\,. \tag{12}$$

Решение этого уравнения дает следующее значение относительной деформации

$$\varepsilon = -\frac{f_2}{c_1 + 2c_2} \approx \frac{7{,}69\cdot 10^{-3}}{-6 + 2\cdot 2{,}66\cdot 10^{-2}} \approx -1{,}29\cdot 10^{-3} \tag{13}$$

Действительно, эта цепочка оказывается сжатой, но ее деформация крайне мала.

3.2 Рассчитаем энергию парного взаимодействия используя точную формулу

$$w_{12} = \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{12} - 2\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{6} = \left(\frac{1}{1-1{,}29\cdot 10^{-3}}\right)^{12} - 2\left(\frac{1}{1-1{,}29\cdot 10^{-3}}\right)^{6} \approx -1 + 6{,}0\cdot 10^{-5}\,.$$

В то время к бесконечной цепочке она была равна

$$\left(w_{12}\right)_0=\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{12}-2\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{6}=\left(\frac{1}{1+1{,}4\cdot10^{-3}}\right)^{12}-2\left(\frac{1}{1+1{,}4\cdot10^{-3}}\right)^{6}\approx-1+7{,}0\cdot10^{-5}$$

Обратите внимание – эта энергия уменьшилась:

$$\Delta w_{12}\approx-1{,}0\cdot10^{-5}. \tag{14}$$

3.3 Найдите изменение энергии взаимодействия между крайними Δw_{13} молекулами можно рассчитывать по приближенной формуле

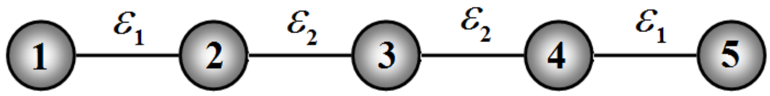
$$\begin{aligned}&\Delta w_{13}=\left(u_2+s_2\varepsilon\right)-\left(u_2+s_2\varepsilon_0\right)=s_2\left(\varepsilon-\varepsilon_0\right)=\\&=2{,}66\cdot10^{-2}\left(-1{,}29\cdot10^{-3}-1{,}40\cdot10^{-3}\right)\approx-7{,}1\cdot10^{-5}\end{aligned} \tag{15}$$

И эта энергия уменьшилась!

3.4 Таким образом, с точностью до 3 значащих цифр потенциальная энергия цепочки из трех зарядов равна энергии двух двойных связей, то есть $w=-2{,}00$. А в исходной бесконечной цепочке эта энергия равнялась энергии трех молекул, поэтому изменение суммарной энергии равно

$$\Delta w=-2{,}0-3\cdot\left(-1{,}03\right)\approx+1{,}09 \tag{16}$$

Часть 4. Цепочка из пяти молекул.



В этом случае относительные смещения частиц будут различаться, они обозначены на рисунке.

Для определения этих смещений запишем условия равновесия двух первых молекул (аналогичные уравнению (12)):

$$\begin{aligned}&c_1\varepsilon_1+f_2+c_2\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)+f_3+c_3\left(\varepsilon_1+2\varepsilon_2\right)+f_4+c_4\left(2\varepsilon_1+2\varepsilon_2\right)=0\\&-c_1\varepsilon_1+c_1\varepsilon_2+f_2+c_2\left(\varepsilon_2+\varepsilon_2\right)+f_3+c_3\left(\varepsilon_2+\varepsilon_1\right)=0\end{aligned}. \tag{17}$$

Первое уравнение перепишем в виде

$$\left(c_1+c_2+c_3+2c_4\right)\varepsilon_1+\left(c_2+2c_3+2c_4\right)\varepsilon_2=-(f_2+f_3+f_4)$$

Так как относительные деформации малы и, учитывая, что коэффициент c_1 значительно больше остальных коэффициентов, то вторым слагаемым в этом уравнении можно пренебречь и записать приближенное решение уравнения в виде:

$$\varepsilon_1\approx-\frac{f_2+f_3+f_4}{c_1}\approx1{,}37\cdot10^{-3}, \tag{18}$$

что мало отличается от сжатия в цепочке из трех атомов.

Аналогично поступим со вторым уравнением (оставляя в нем только слагаемые с коэффициентом c_1 при смещениях)

$$-c_1\varepsilon_1+c_1\varepsilon_2=-(f_2+f_3)\quad\Rightarrow\quad\varepsilon_2\approx\frac{f_2+f_3}{c_1}+\varepsilon_1\approx2{,}73\cdot10^{-3} \tag{19}$$

4.1 Так как смещения молекул имеют тот же порядок, что и предыдущей части, то для расчета энергии взаимодействия можно учитывать только энергию парных взаимодействий:

$$w=2w_{12}+2w_{23}\approx-4+6{,}8\cdot10^{-4}. \tag{20}$$

Заметим, что и эта энергия уменьшается:

$$\Delta w_{св}=w-4\left(w_{12}\right)_0=6{,}8\cdot10^{-4}-4\cdot7{,}0\cdot10^{-5}\approx-4{,}0\cdot10^{-4}. \tag{21}$$

С требуемой точностью энергия цепочки из пяти молекул можно считать равной -4. Поэтому изменение энергии 5 молекул при их «вырывании» из бесконечной цепочки равно

$$\Delta w = -4 - 5 \cdot (-1{,}03) \approx +1{,}15 \, . \tag{22}$$

Вопрос последний.

Действительно наличие границы приводит к малому сжатию приповерхностного слоя, но, во-первых, оно мало, во-вторых, общая энергия связей при этом уменьшается! Увеличение же суммарной энергии взаимодействия связано главным образом с уменьшением числа связей, их разрывом при выходе молекул на поверхность!

11 класс.

Задача 11.1. Новые Архимеды.

Вопрос 1.

Пока тело не начал опускаться в воду (для x от нуля до 5,0 см), сила натяжения нити равна силе тяжести, действующей на тело:

$$T_0 = mg = 2{,}0 \cdot 10^2\ H \tag{1}$$

При частичном погружении, на тело начинает действовать сила Архимеда, которая уменьшает силу натяжения веревки. Пока нижний цилиндр полностью не погрузился в воду (для x от 5,0 см до 20 см) сила натяжения будет определяться по формуле

$$T = T_0 - \rho g(x - x_0) \cdot \pi R_1^2 . \tag{2}$$

При полном погружении нижнего цилиндра сила натяжения становится равной

$$T_1 = T_0 - \rho g h_1 \cdot \pi R_1^2 = 1{,}53 \cdot 10^2\, H\ . \tag{3}$$

После начала погружения верхнего цилиндра (при x от 20 см до 30 см) сила натяжения будет уменьшаться медленнее, так как радиус этого цилиндра меньше:

$$T = T_0 - \rho g(x - x_0 - h_1) \cdot \pi R_2^2 . \tag{4}$$

При полном погружении тела сила натяжения уменьшиться до величины

$$T_2 = T_1 - \rho g h_2 \cdot \pi R_2^2 = 1{,}45 \cdot 10^2\, H \tag{5}$$

График этой зависимости показан на рисунке.

Вопрос 2.

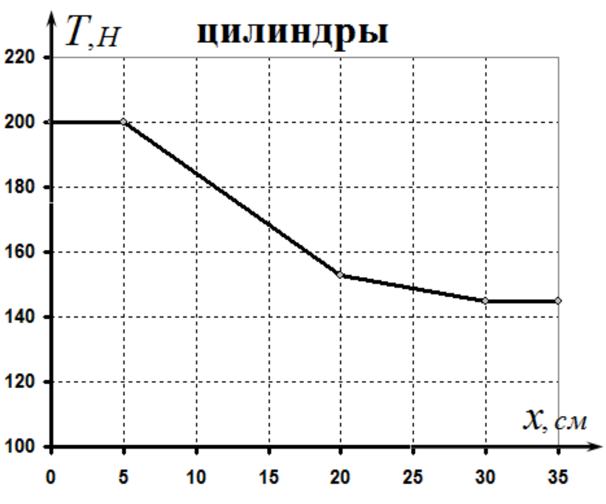
При погружении конуса сила натяжения веревки будет изменяться по закону

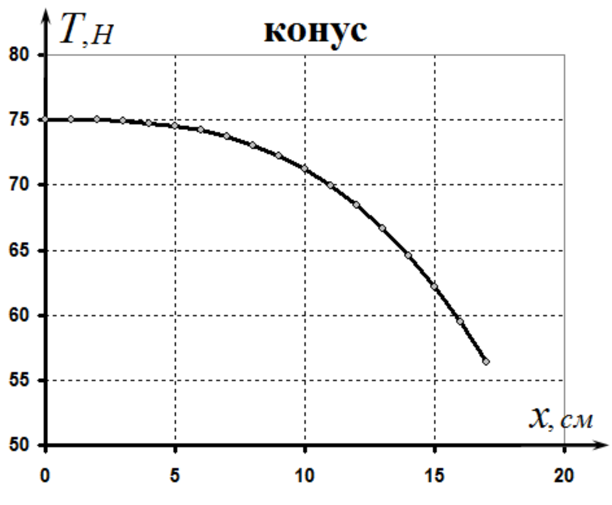
$$T = mg - \frac{1}{3}\rho g \pi x^3 tg^2\theta . \tag{6}$$

Для построения графика подставим численные значения:

$$T = 75 - 3{,}8 \cdot 10^{-3} x^3 , \tag{7}$$

где x - в сантиметрах, T - в ньютонах. График показан на рисунке.





Вопрос 3.

При погружении на малую величину Δx сила Архимеда изменяется на величину

$$\Delta F = \rho g \Delta V = \pi \rho g\, r^2 \Delta x , \tag{8}$$

где $\Delta V = \pi r^2 \Delta x$ - изменение объема погруженной части. На столько же уменьшается сила натяжения нити, поэтому

$$\Delta T = -\pi \rho g\, r^2 \Delta x . \tag{9}$$

Из этого уравнения находим искомую формулу

$$r(x) = \sqrt{-\frac{1}{\pi\rho g}\frac{dT}{dx}}\,, \tag{10}$$

где $\frac{dT}{dx}$ - производная от силы натяжения нити по координате.

Заметим, что практическое применение этой формулы к экспериментальным данным затруднительно, так численный расчет производных выполняется с большими ошибками.

Часть 4.

Вася поместил цилиндр в легкую консервную банку, которая при опускании заполнилась водой, чем и объясняются полученные и графики и своеобразный «гистерезис» - различие между зависимостями при подъеме и при опускании.

Радиус банки примерно равен 10 см, ее высота 20 см, радиус вставленного цилиндра примерно 5 см.

Задача 11.2. Резонанс

1. После столкновения шарик получает дополнительную скорость $2u$.
Следующее соударение произойдет через:

$$\Delta t = 2\frac{v+2u}{g} = \frac{2v}{g} + \frac{4u}{g} \qquad (1)$$

И это время должно быть кратным периоду после любого количества соударений. Это может быть, только если каждое из слагаемых выражения (1) кратно периоду:

$$\frac{4u}{g} = Tm \qquad (2),$$

$$\frac{2v}{g} = Tn \qquad (3).$$

Из равенства (2) следует:

$$T = \frac{4u/g}{m} = A/m \qquad (4).$$

Подставляя значение периода в выражение (3), получим:

$$v = 2u\frac{n}{m} = B\frac{n}{m} \qquad (5)$$

2. Численные значения A и B:

$$A = 0.2c \qquad (6)$$

$$B = 1 м/c \qquad (7)$$

3. Подставляя значения периода и скорости (4), (5) в условия $v \ge 10u$ и $uT \le h/10$, запишем в виде ($h = \frac{v^2}{2g}$):

$$\frac{n}{m} \ge 5 \qquad (8)$$

$$\frac{0{,}1}{m} \le \frac{1}{10}\frac{1}{2\cdot 10}\frac{n^2}{m^2} \qquad (9)$$

Последнее условие можно записать в виде:

$$n \ge \sqrt{20}\sqrt{m} \qquad (10).$$

Т.к. $\sqrt{20} < 5$, то последнее условие автоматически выполняется при условии (8).
Таким образом, числа n и m должны быть связаны условием:

$$n \ge 5m \qquad (11)$$

4. При $m=1$ скорость (с учетом условия (11)) может принимать значения:

$$v = 5\frac{м}{c}; 6\frac{м}{c}; 7\frac{м}{c}.... \qquad (12).$$

Для $m=2$ и $m=10$ аналогично:

$$v = 5\frac{м}{c}; 5{,}5\frac{м}{c}; 6\frac{м}{c}.... \qquad (13),$$

$$v = 5\frac{м}{c}; 5{,}1\frac{м}{c}; 5{,}2\frac{м}{c}.... \qquad (14).$$

Таким образом, минимальная резонансная скорость во всех случаях равна:

$$v_0 = 5 м/c \qquad (15)$$

А интервал между резонансными скоростями уменьшается и становится равным:

$$\Delta v = \frac{1}{m} м/с \qquad (16)$$

5. После i столкновений скорость шарика будет равна:

$$v_i = v_0 + 2ui \qquad (17)$$

Тогда высота подъема равна:

$$h_i = \frac{(v_0 + 2ui)^2}{2g} = \frac{(5+i)^2}{20} \qquad (18)$$

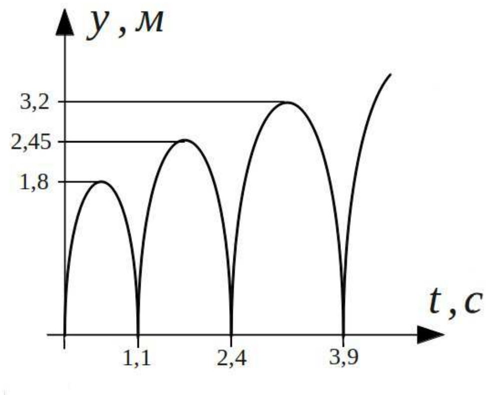
Промежуток времени между последовательными столкновениями:

$$\Delta t_i = 2\frac{v_0 + 2ui}{g} \qquad (19).$$

Тогда время i-го соударения:

$$t_i = \frac{2v_0}{g} i + \frac{2u}{g} i^2 = i + 0{,}1 i^2 \qquad (20)$$

6. Схематический график зависимости изображен на рисунке.



7. За время между ударами будет появляться сдвиг по времени, равный $\frac{2\delta v}{g}$. Процесс увеличения высоты подъема сменится уменьшением, когда сдвиг по времени станет равным половине периода, т.е. после

$$k = \frac{Tg}{4\delta v} \qquad (21)$$

ударов.

Подставляя значение $T = \frac{0{,}2}{m} = 0{,}2\Delta v$, получим:

$$k = \frac{0{,}5}{\delta v / \Delta v} \qquad (22).$$

8. Подставляя (22) в выражение (20), получим:

$$t_i = k + 0{,}1k^2 = \frac{0{,}5}{\delta v/\Delta v} + 0.1\left(\frac{0{,}5}{\delta v/\Delta v}\right)^2 \qquad (23),$$

$$h_i = \frac{(5+k)^2}{20} = \frac{\left(5 + \frac{0{,}5}{\delta v/\Delta v}\right)^2}{20} \qquad (24).$$

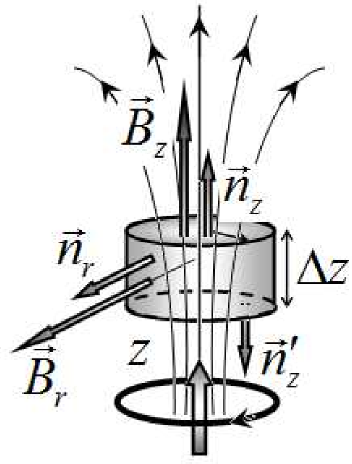
9. Для оценки, можно считать, что при каждом ударе платформа находится на высоте равной амплитуде. Тогда за k ударов ошибка составит:

$$\Delta h = ak = \frac{T}{2} u \frac{0{,}5}{\delta v/\Delta v} = \frac{0{,}025}{\delta v/\Delta v}. \qquad (25)$$

Задача 11.1. «Railgun»

Часть 0.

0.1 Для расчета радиальной компоненты магнитного поля можно воспользоваться теоремой о магнитном потоке (или свойством замкнутости силовых линий магнитного поля), из которой следует, что магнитный поток через любую замкнутую поверхность равен нулю.



Выделим тонкий цилиндр толщиной Δz и радиуса r, нижнее основание которого находится на расстоянии z от центра кольца, соосный с кольцом и применим теорему о магнитном потоке к поверхности этого цилиндра. Магнитный поток через нижнее основание равен (учтите, что вектора индукции и нормали здесь противоположны)

$$\Phi_1 = -B_z(z)\cdot \pi r^2,$$

где $B_z(z)$- значение вертикальной компоненты вектора индукции на высоте z;

поток через верхнее основание равен

$$\Phi_2 = B_z(z+\Delta z)\cdot \pi r^2,$$

где $B_z(z+\Delta z)$- значение вертикальной компоненты вектора индукции на высоте $z+\Delta z$;

поток через боковую поверхность (из осевой симметрии следует, что модуль радиальной составляющей вектора индукции B_r на этой поверхности постоянен):

$$\Phi_3 = B_r \cdot 2\pi r \Delta z.$$

Сумма этих потоков равна нулю, поэтому справедливо уравнение

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = -B_z(z)\cdot \pi r^2 + B_z(z+\Delta z)\cdot \pi r^2 + B_r \cdot 2\pi r \Delta z = 0,$$

из которого определим искомую величину

$$B_r = -\frac{r}{2}\cdot\frac{B_z(z+\Delta z) - B_z(z)}{\Delta z} = -\frac{r}{2}\cdot\frac{dB_z(z)}{dz}. \qquad (1)$$

0.2 Так как вид зависимости радиальной компоненты вектора индукции задан в условии задачи, то для расчета радиальной компоненты достаточно вычислить производную от этой функции

$$B_r = -\frac{r}{2}\cdot\frac{dB_z(z)}{dz} = -\frac{r}{2}\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{\mu_0 I_0}{2}\cdot\frac{R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{3\mu_0 I_0 R^2 r}{4}\frac{z}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}. \qquad (2)$$

Часть 1. Снаряд – постоянный магнит.

1.1. Понятно, что сила, действующая на снаряд, определяется радиальной компонентой поля и по закону Ампера равна

$$F = 2\pi r i B_r = \frac{3\pi\mu_0 I_0 R^2 r^2 i}{2}\frac{z}{\left(R^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}. \qquad (3)$$

Для построения графика зависимость (3) удобно представить в виде

$$F = 2\pi r\, iB_r = \frac{3\pi\mu_0 I_0 r^2 i}{2R^2} \frac{\frac{z}{R}}{\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)^{\frac{5}{2}}} = F_1 \frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{5}{2}}}, \tag{4}$$

где обозначено $F_1 = \dfrac{3\pi\mu_0 I_0 r^2 i}{2R^2}$.

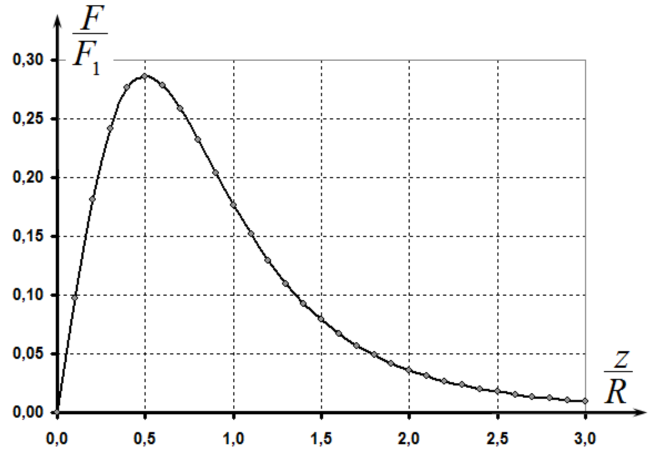


График этой функции теперь можно представить в относительных единицах, он показан на рисунке. Так как функция нечетная, то приведен график только для положительных значений z.

Максимум этой функции можно найти обычным способом. Найдем производную от функции (4) и приравняем ее к нулю

$$\left(\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{5}{2}}}\right)' = \frac{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{5}{2}} - \xi\cdot\frac{5}{2}\left(1+\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot 2\xi}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1-4\xi^2}{1+\xi^2} = 0. \tag{5}$$

Из этого уравнения следует, что функция имеет экстремумы при $\xi^* = \pm\dfrac{1}{2}$, ее значение в максимуме равно

$$\left(\frac{F}{F_1}\right)_{\max} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{16}{25\sqrt{5}} \approx 0{,}29. \tag{6}$$

1.2 Для того, чтобы скорость снаряда была максимальна, его надо поместить в точку, где сила магнитного поля максимальна, то есть т.е при $z_0 = \dfrac{R}{2}$. В этом случае эта сила пропорциональна току в кольце и равна

$$F = 2\pi r\, iB_r = \frac{48\pi\mu_0 r^2 i}{50\sqrt{5}R^2} I_0 = A_1 I_0. \tag{7}$$

Запишем уравнение второго закона Ньютона для снаряда

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = A_1 I_0 = A_1 \frac{\Delta q}{\Delta t}. \tag{8}$$

Здесь сила тока представлена через величину электрического заряда, протекающего по катушке. С учетом того, что в начальный момент снаряд покоился, из уравнения (8) следует, что скорость снаряда пропорциональная заряду, протекшему по кольцу (причем она не зависит от временной зависимости силы тока):

$$v_{\max} = \frac{A_1}{m} q. \tag{9}$$

При разрядке батареи по кольцу пробежит весь заряд, накопленный в ней $q = CU_0$, поэтому

$$v_{\max} = \frac{A_1}{m} q = \frac{48\pi\mu_0 r^2 i}{50\sqrt{5}R^2 m} CU_0 . \quad (10)$$

1.3 Как следует из полученной формулы, при изменении полярности батареи (изменении направления тока) направление полета снаряда изменится на противоположное.

Часть 2. Снаряд – магнетик.

Если снаряд находится на расстоянии z от центра кольца, то его намагниченность равносильна силе поверхностного тока

$$i = \chi B_z \quad (11)$$

Следовательно, на снаряд действует сила, модуль которой равен

$$F = 2\pi r\, iB_r = \frac{3\pi\mu_0 I_0 R^2 r^2}{2} \frac{z}{\left(R^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}} i = \frac{3\pi\mu_0 I_0 R^2 r^2}{2} \frac{z}{\left(R^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}} \cdot \chi \left(\frac{\mu_0 I_0}{2} \cdot \frac{R^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right) =$$

$$= \frac{3\pi\mu_0^2 I_0^2 R^4 r^2}{4} \chi \frac{z}{\left(R^2 + z^2\right)^4} = \frac{3\pi\mu_0^2 I_0^2 r^2}{4R^3} \chi \frac{\frac{z}{R}}{\left(1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^4} = \frac{3\pi\mu_0^2 I_0^2 r^2}{4R^3} \chi \frac{\xi}{\left(1 + \xi^2\right)^4} \quad (12)$$

Заметим, что эту силу можно представить в виде

$$F = 2\pi r B_r i = 2\pi r B_r \chi B_z = 2\pi r \chi B_z \left(-\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz} \right) = -\pi r^2 \chi \frac{d\left(B_z^2\right)}{dz} . \quad (13)$$

Так как снаряд намагничивается по направлению внешнего поля, то между кольцом и снарядом всегда будет действовать сила притяжения, то есть снаряд будет двигаться к центру кольца.

Найдем расстояние z_0, при котором сила притяжения будет максимальна. Для этого вычислим производную от функции (12) и приравняем ее к нулю

$$\left(\frac{\xi}{\left(1 + \xi^2\right)^4} \right)' = \frac{\left(1 + \xi^2\right)^4 - \xi \cdot 4\left(1 + \xi^2\right)^3 \cdot 2\xi}{\left(1 + \xi^2\right)^8} = \frac{1 - 7\xi^2}{\left(1 + \xi^2\right)^5} = 0 . \quad (14)$$

Таким образом, максимум этой функции достигается при $\xi^* = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}$ и равен

$$\left(\frac{\xi}{\left(1 + \xi^2\right)^4} \right)_{\max} = \frac{\frac{1}{\sqrt{7}}}{\left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2\right)^4} = \frac{1}{\sqrt{7}} \left(\frac{7}{8}\right)^4 \approx 0{,}22 . \quad (15)$$

Следовательно, максимальная сила, действующая на железный снаряд равна

$$F = \frac{3}{4\sqrt{7}} \left(\frac{7}{8}\right)^4 \frac{\pi\mu_0^2 I_0^2 r^2}{R^3} \chi = A_2 I_0^2 . \quad (16)$$

В данном случае сила, действующая на снаряд, пропорциональна квадрату силы тока, поэтому воспользоваться ранее полученным результатом (9) нельзя.
Запишем уравнение второго закона Ньютона для рассматриваемого снаряда

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = A_2 I_0^2 . \qquad (17)$$

Из этого уравнения следует, что за малый промежуток времени Δt скорость снаряда увеличивается на величину

$$\Delta v = \frac{A_2}{m} I_0^2 \Delta t . \qquad (18)$$

Теперь заметим, что величина $I_0^2 \Delta t$ входит в выражение для количества теплоты, выделяющейся в кольце. Действительно, по закону Джоуля-Ленца это количество теплоты равно

$$\delta Q = I_0^2 Y \Delta t . \qquad (19)$$

Теперь уравнение (18) можно переписать в виде

$$\Delta v = \frac{A_2}{mY} \delta Q . \qquad (20)$$

Таким образом, скорость, которую приобретет снаряд, пропорциональна количеству теплоты, выделившейся в кольце за время прохождения тока, которое в свою очередь, равно энергии запасенной в конденсаторе $Q = \frac{CU_0^2}{2}$. Поэтому скорость снаряда рассчитывается по формуле

$$v_{\max} = \frac{A_2}{mY} Q = \frac{3}{4\sqrt{7}} \left(\frac{7}{8}\right)^4 \frac{\pi\mu_0^2 r^2 \chi}{R^3} \frac{CU_0^2}{2mY} = \frac{3}{8\sqrt{7}} \left(\frac{7}{8}\right)^4 \frac{\pi\mu_0^2 r^2 \chi}{R^3} \frac{CU_0^2}{2mY} . \qquad (21)$$

На первый взгляд, в данном рассмотрении где-то содержится ошибка – если энергия конденсатора все перейдет в тепловую, то откуда возьмется кинетическая энергия у снаряда? Разрешение сделанного парадокса заключается в сделанной оговорке – «индуктивностью кольца пренебречь». В реальной ситуации при строгом расчете необходимо учитывать обратное влияние силы тока в снаряде на кольцо. Так как этот ток изменяется, то в кольце будет возникать ЭДС индукции, которая будет влиять на силу тока в нем. Именно благодаря этому явлению, ток в кольце совершит большую работу, которая и пойдет на увеличение кинетической энергии снаряда. Мы же считаем, что эта энергия мала, по сравнению с начальной энергией конденсатора.

2.3 Не зависимо от направления силы тока в кольце снаряд полетит в сторону центра кольца.

Часть 3. Снаряд – катушка индуктивности.

3.1 Сначала найдем, какой ток индуцируется в катушке снаряда. Так электрическим сопротивлением катушки можно пренебречь, то в любой момент времени сумма ЭДС самоиндукции и ЭДС индукции, возникающей благодаря изменению внешнего поля равна нулю

$$-L\frac{\Delta i}{\Delta t} - \pi r^2 \frac{\Delta B_z}{\Delta t} = 0 . \qquad (22)$$

Из этого уравнения следует, что сила тока в катушке снаряда пропорциональна индукции магнитного поля кольца

$$L\frac{\Delta i}{\Delta t} = -\pi r^2 \frac{\Delta B_z}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad i(t) = -\frac{\pi r^2}{L} B_z(t). \qquad (23)$$

Знак минус указывает, что ток в катушке направлен противоположно току в кольце (что также следует из правила Ленца). Следовательно, снаряд будет отталкиваться от кольца. В остальном, решение этой части задачи полностью совпадает с решением предыдущей. Достаточно заметить, что в данной части коэффициент пропорциональности χ равен

$$\chi = -\frac{\pi r^2}{L}, \tag{24}$$

и подставить его в окончательный результат. Поэтому модуль максимальной скорости снаряда равен

$$v_{\max} = \frac{3}{8\sqrt{7}}\left(\frac{7}{8}\right)^4 \frac{\pi\mu_0^2 r^2}{R^3}\frac{CU_0^2}{2mY}\cdot\frac{\pi r^2}{L} = \frac{3}{8\sqrt{7}}\left(\frac{7}{8}\right)^4 \frac{\pi^2\mu_0^2 r^4}{R^3}\frac{CU_0^2}{2mYL}. \tag{25}$$

3.2 При любом подключении батареи конденсаторов снаряд будет двигаться от центра катушки, убегать от нее!